

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: שעתיים וארבעים וחמש דקות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $\frac{1}{3}$ נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון מעגל I שמשוואתו היא $x^2 - 6x + y^2 + t = 0$. t הוא פרמטר קטן מ-9.
 א. הביעו באמצעות t את רדיוס המעגל.

הישר $y = x$ משיק למעגל.

ב. מצאו את הערך של t.

הזיזו את מעגל I שמאלה כך שהתקבל מעגל II שמרכזו בראשית הצירים O.

A היא נקודה כלשהי על מעגל II כך ש- $-1.5 \leq y_A \leq 1.5$.

דרך נקודה A מעבירים מיתר AB המאונך לציר ה-y.

נקודה P נמצאת על המיתר AB כך שמתקיים $AB = 2 \cdot PO$.

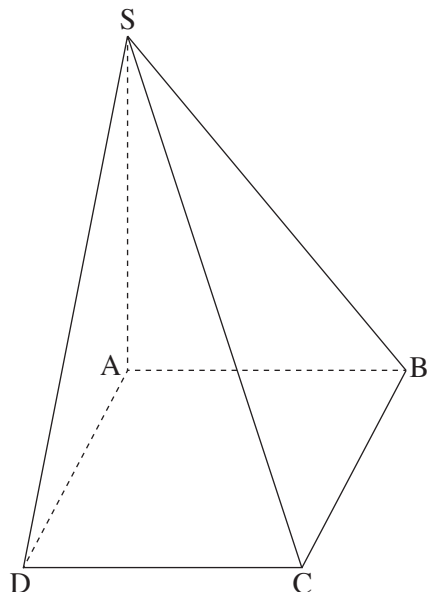
ג. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המתקבלות באופן זה נמצא על אליפסה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה K היא המוקד הימני, והנקודה F היא המוקד השמאלי של האליפסה שמצאתם בסעיף ג.

C היא נקודה כלשהי על האליפסה כך שמתקבל משולש CKF.

ד. חשבו את היקף המשולש CKF.

ה. האם קיימת נקודה C שבעבורה שטח המשולש CKF הוא 3? נמקו את תשובתכם.



2. נתונה פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא מקבילית.

SA הוא גובה הפירמידה.

הנקודה M היא אמצע האלכסון BD.

נסמן: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AD} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

א. הביעו באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\vec{SM}$.

נתון כי $\vec{SM}$ מאונך ל- $\vec{DB}$.

ב. הוכיחו כי $|\underline{u}| = |\underline{v}|$.

נתון: $S(0, 0, 6)$, $B(0, 5, 0)$, $A(0, 0, 0)$.

$p > 0$, $D(3, p, 0)$.

ג. מצאו את שיעורי הנקודות D ו- C.

דרך האלכסון AC מעבירים מישור המקביל למקצוע SD.

המישור חותך את המקצוע SB בנקודה K.

ד. מצאו את משוואת המישור.

ה. לפניכם שתי טענות I-II. קבעו בעבור כל אחת מן הטענות אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הישר KM מקביל לישר SD.

II. כל ישר שמאונך למישור ACK, מאונך לישר SD.

3. א. הביעו באמצעות x ו- y את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות $z = x + iy$ במישור גאוס

המקיימות $|z| = |z - (2 + 2i)|$.

z הוא משתנה מרוכב.

נתונה המשוואה $z^2 - z(2 + 2i) + 4i = 0$.

A ו- B הן נקודות המיוצגות על ידי שני פתרונות המשוואה.

ב. הראו כי הנקודות A ו- B נמצאות על המקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

הנקודות C ו- D נמצאות על הצירים כך ש- ABCD הוא ריבוע.

סובבו את הריבוע ABCD סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון בזווית α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

כל שמונה הנקודות (הנקודות A, B, C ו- D וארבע הנקודות שהתקבלו אחרי הסיבוב) מיוצגות על ידי פתרונות

של המשוואה $z^n = b$, שבה n הוא מספר טבעי ו- b הוא מספר ממשי.

ג. (1) מצאו את הערך של b ואת הערך של α בעבור $n = 8$.

(2) מצאו ערך אפשרי של n בעבור $\alpha = 15^\circ$, ומצאו את הערך של b המתאים לו.

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4.

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x}{a - e^x}$, a הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(3) בעבור $a > 0$ ובעבור $a < 0$.

הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה- y של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. קבעו איזה מן הגרפים IV–I שבסוף השאלה מתאר את הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a = 3$ ואיזה מן הגרפים מתאר את

הפונקצייה $f(x)$ בעבור $a = -3$. נמקו את קביעותיכם.

הציבו $a = 3$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ה.

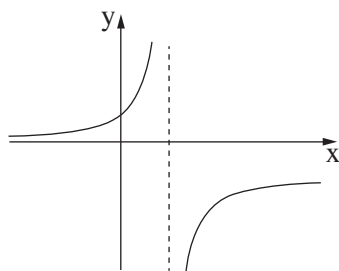
נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{1}{f(x) + 2}$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

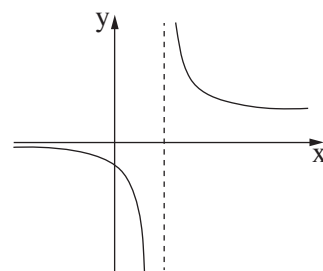
(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

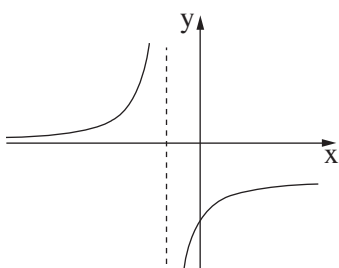
ה. לפניכם טענה: $\int_{-4}^{-2} g(x) dx > \int_2^3 g(x) dx$. האם הטענה נכונה? נמקו את תשובתכם.



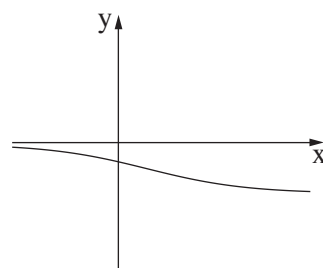
I



II



III

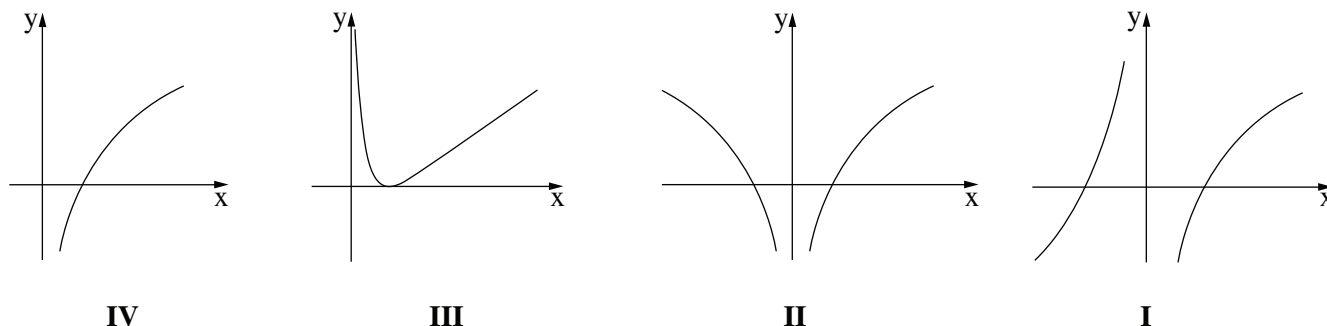


IV

5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \ln(x^n)$, n הוא מספר טבעי זוגי.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) לפניכם ארבעה גרפים, I–IV. קבעו איזה מהם מייצג את הפונקצייה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.



הציבו $n = 2$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על סעיפים ב–ד.

נתונה הפונקצייה $g(x) = (f(x))^2 - 4$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $k(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, בתחום $x > 0$.

ד. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $k(x)$.

(2) חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $k(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = e^2$ ו- $x = e^3$.

בהצלחה!