

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה!!

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.
פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים
פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- (2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
- (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

שימו לב: יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענו על שלוש מן השאלות 1-5, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברת.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב,

מספרים מרוכבים

1. נתונות הנקודות $A(-5, 4)$ ו- $B(0, -1)$.

א. מצאו את משוואת המקום הגאומטרי של מרכזי המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

מעגל M הוא אחד מן המעגלים שהקטע AB הוא מיתר שלהם.

נקודות החיתוך של המעגל M עם ציר ה- x הן מוקדים של אליפסה שמשוואתה קנונית.

ב. מצאו את שיעורי מרכז המעגל M ואת הרדיוס שלו.

נתון כי אורך הציר הראשי של האליפסה שווה לאורך קוטר המעגל M .

ג. מהי משוואת האליפסה?

נסמן ב- F את המוקד הימני של האליפסה. ישר המאונך לציר ה- x עובר במוקד השמאלי של האליפסה.

הישר חותך את האליפסה בנקודות Q ו- T , ואת המעגל M בנקודות K ו- L .

ד. מצאו את היחס בין שטח המשולש KLF לבין שטח המשולש TQF .

2. נתונה פירמידה OABC שבסיסה משולש ABC.

$$\vec{OA} = \underline{u}, \vec{OB} = \underline{v}, \vec{OC} = \underline{w}.$$

$$\text{נתון: } |\underline{w}| = |\underline{v}| = |\underline{u}|, \angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ.$$

$$\text{הנקודה H מקיימת } \vec{OH} = t\underline{u} + s\underline{v} + k\underline{w} \text{ ו- } s, t, k \text{ הם פרמטרים.}$$

נתון כי \vec{OH} מאונך לבסיס ABC של הפירמידה.

$$\text{א. הוכיחו כי } t = s = k.$$

הנקודה M נמצאת בבסיס ABC של הפירמידה, והיא נקודת המפגש של תיכוני הבסיס.

$$\text{ב. הוכיחו כי } \vec{OM} = \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}, \text{ והסבירו מדוע OM הוא גובה לבסיס ABC של הפירמידה.}$$

הנקודה P נמצאת על הישר ℓ שעליו מונח הגובה לבסיס ABC.

ג. הביעו באמצעות $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, את הווקטור \vec{OP} שבעבורו נפח הפירמידה PABC כפול

מנפח הפירמידה OABC (שתי אפשרויות).

ממקמים את הפירמידה OABC במערכת צירים. הנקודה O נמצאת בראשית הצירים, הנקודה A נמצאת על החלק החיובי של ציר ה-x, הנקודה B על החלק החיובי של ציר ה-y, והנקודה C על החלק החיובי של ציר ה-z.

$$\text{נתון: } |\underline{u}| = a.$$

ד. מצאו את ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ שעליו נמצא הקטע OP.

ה. הביעו באמצעות a את משוואת המישור ABC.

ו. נתון כי נפח הפירמידה OABC הוא $57\frac{1}{6}$. חשבו את a.

3. המספר $z = R(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ נמצא במישור גאוס ברביע השלישי.

$$\text{נתון: } \frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

א. מצאו את α .

$$\text{נתון: } |4iz| - \left| \frac{\bar{z}}{i} \right| - \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 8$$

ב. מצאו את R .

ג. נתונה המשוואה: $w^9 = \frac{z^3}{27}$ (z הוא המספר שמצאתם).

הראו כי המספר $\frac{z}{\bar{z}}$ הוא אחד הפתרונות של המשוואה.

ד. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים. קודקודי הבסיס B ו- C מתאימים למספרים: $\frac{z}{\bar{z}}$ ו- $\frac{\bar{z}}{z}$.

קודקוד הראש A מתאים למספר $z + k$, k הוא מספר מדומה טהור.

(1) מהו הערך של k ?

(2) חשבו את שטח המרובע $ABOC$ (הנקודה O היא ראשית הצירים).

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 e^{a-x^3}$ המוגדרת לכל x , a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את התחום שבו הפונקצייה $f(x)$ חיובית.

(2) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון כי השטח הכלוא בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ לבין ציר ה- x הוא $\sqrt[3]{\frac{4e}{9}}$.
ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a = 1$, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

הפונקצייה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקצייה $g(x)$ ($g'(x) = f(x)$).

ד. (1) מהו תחום העלייה של הפונקצייה $g(x)$? נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $g(x)$? נמקו.

נסמן ב- B את נקודת הפיתול שבה הערך של הפונקצייה $g(x)$ הוא הגבוה מבין כל נקודות הפיתול שלה.

נתון כי שיעור ה- y של הנקודה B הוא $\frac{e - \sqrt[3]{e}}{3}$.

ה. מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

5. נתונה פונקצייה $f(x)$ המקיימת את התכונות האלה: הפונקצייה מוגדרת לכל x ורציפה, הפונקצייה היא אי־זוגית, הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של הפונקצייה, ולפונקצייה יש נקודת מינימום יחידה ששיעוריה הם $(-1, -a)$, a הוא פרמטר חיובי.

א. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \ln(f(x))$.

ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $h(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצאו את טווח הערכים של a שבעבורו גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)$, אם ידוע שהגרף שלה חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

נתון: $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$.

$g(x)$ היא פונקצייה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ וגם: $g(0) = 0$.

ג. (1) מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

(2) האם הפונקצייה $g(x)$ היא זוגית, אי־זוגית או לא זוגית ולא אי־זוגית? נמקו.

לפניכם האינטגרל $\int_{-5}^t g(x) dx$, $t > -5$.

ד. מהו הערך של t שבעבורו מתקיים $2 \cdot \int_{-5}^t g(x) dx = \int_{-5}^5 g(x) dx$? נמקו.

בהצלחה!