מדינת ישראל
משרד החינוך

מועד חורף מאוחר

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: **חורף מאוחר**, תשפ"א, 2021
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון — אלגברה והסתברות
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
עליך לענות על חמש שאלות לבחירתך — $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

המשך מעבר לדף

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על חמש מן השאלות 8-1 (לכל שאלה — 20 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים. הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B.

לאורך המסלול רָכַב כל אחד מהם במהירות קבועה.

יואב הגיע לנקודה B, ומייד חזר באותו המסלול לנקודה A.

כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ־ B ל־ A והגיע לאמצע המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.

א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.

40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה מ־ B ל־ A, נפגשו יואב ודני.

ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.

30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B, והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב־ 5 ק"מ מן המרחק של יואב מן הנקודה B.

ג. מצא את אורך המסלול AB.

ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק"מ?

מצא שתיים מבין שלוש האפשרויות.

המשך בעמוד 3

2. הסדרה a_n היא סדרה הנדסית המקיימת לכל n טבעי את הכלל: $3a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0$.

נתון כי $a_1 \neq 0$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n .

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ולא מתכנסת** ב־ $b_1, b_2, b_3, \dots$.

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ומתכנסת** ב־ $c_1, c_2, c_3, \dots$.

ב. הסבר מדוע הסדרה $b_1c_1,\ b_2c_2,\ b_3c_3,\ \dots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.

נתון: $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 + \dots = 15$

$b_1 = c_1 = m$

ג. מצא את m (רשום את שתי האפשרויות).

ענה על סעיף ד בעבור ה־ m הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.

ד. נתון: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k = 1{,}705$

מצא את k .

3. בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: **אדום**, **צהוב**, **כחול**.

נתון:

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכד ו־ $\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכד **מחוספסים**, וכל שאר הכדורים שבכד **חלקים**.

הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד. את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם **מחוספסים**?

ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים?

(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?

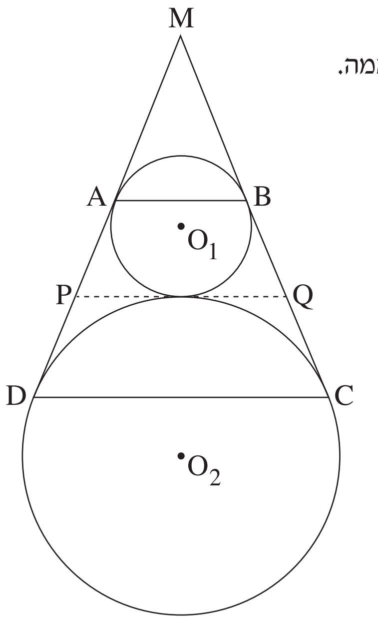
ענה על סעיף ג בעבור כד שבו n כדורים.

נתון: $50 < n < 100$.

ג. מצא את n (את שתי האפשרויות).

המשך בעמוד 4

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור



4. בציור שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
מרכזי המעגלים הם הנקודות O_1 ו־ O_2 , והרדיוסים שלהם הם R_1 ו־ R_2 בהתאמה.
מן הנקודה M , הנמצאת מחוץ לשני המעגלים,
יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו־ B ,
ולמעגל O_2 בנקודות D ו־ C , כמתואר בציור.
המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את הישרים MD ו־ MC
בנקודות P ו־ Q בהתאמה.

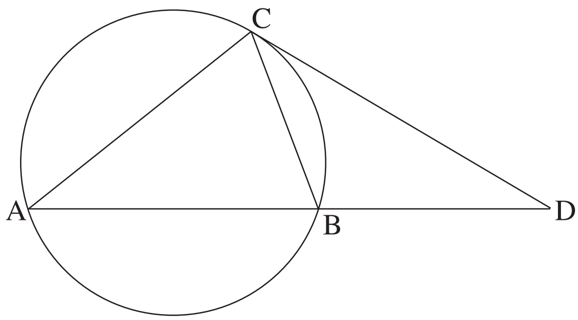
א. הוכח כי המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז ABCD .

ג. הוכח כי $\sphericalangle O_1QO_2 = 90^o$.

נתון: $R_1 = 4$, $R_2 = 9$.

ד. מצא את PQ .



5. בציור שלפניך מתואר משולש חד־זוויות ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו הוא R .
המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך הקטע AB בנקודה D .
נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא 2R .
נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$.

א. הבע את BD באמצעות R ו־ α .

נתון: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$.

ב. מצא את α .

נתון: שטח המשולש CBD הוא 27 .

ג. מצא את R .

המשך בעמוד 5

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = a \cdot f(x)$. $a > 0$ הוא פרמטר.

ג. הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

הישר שמצאת בסעיף **ג** אינו חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה נוספת.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר שמצאת בסעיף **ג** ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$ שווה ל־ $\left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)$.

ד. מצא את a .

המשך בעמוד 6

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** בעבור אֵילו ערכים של הפרמטר a אין לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הבע באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ לכל אחד מן התחומים i-iii של הפרמטר a שלפניך:

i $a>0$

ii $a<0$

iii $a=0$

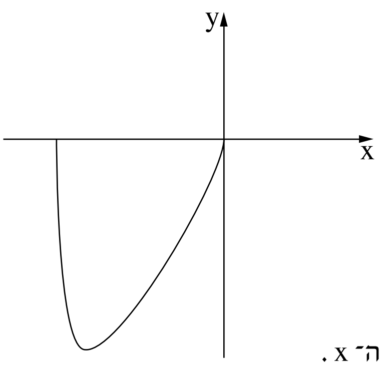
נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה־ x בשתי נקודות.

ד. **(1)** מצא את התחום של הפרמטר a . נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר b באמצעות a . נמק.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=x\cdot\sqrt{a-x^2}$. $a>0$ הוא פרמטר.



א. **(1)** הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא אי־זוגית.

(3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)$.
העתק את הסרטוט למחברתך והשלם אותו כך שיתאר
את גרף הפונקציה $f(x)$ כולו.

דרך נקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון מעבירים אנך לציר ה־ x .

האנך חותך את ציר ה־ x בנקודה B .

ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O , חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C .

דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה־ x . האנך חותך את ציר ה־ x בנקודה D .

נתון: הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו־ COD הוא $4\sqrt{2}$.

ב. מצא את a .

בהצלחה!