

ה ש א ל ו ת

שים לב! הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.

שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.

קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה הרגיל של פועל II.

אם כל אחד מהפועלים יגביר את קצב העבודה הרגיל שלו ב- 50%,

ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב

המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II

מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.

הפועלים ביצעו יחד עבודה זו בקצב הרגיל שלהם ב- 6 ימים.

כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

2. נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא:

$$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \dots + (4n - 2)]$$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ- 102.

חשב את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה

(לאו דווקא הסכום של כל האיברים).

3. הוועדה המארגנת של התחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א' או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'.
 ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם האחרים.
 ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.
 אם ישפוט בתחרות רק שופט א' – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם השופט יצביע בעדו.
 אם ישפטו שלושת השופטים – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם לפחות 2 מהשופטים יצביעו בעדו.
 יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות. נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5.
 א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א', שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפטו בתחרות שלושת השופטים? נמק.
 ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפטו שלושת השופטים.
 נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר לשלב נוסף בתחרות, גדולה מ-0.8.
 מצא את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33 \frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה — $16 \frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4. א. הוכח כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה,

המשולש הוא שווה-שוקיים.

ב. במשולש ABC הנקודות M, L, ו-K הן

אמצעי הצלעות CA, CB ו-AB בהתאמה.

הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים

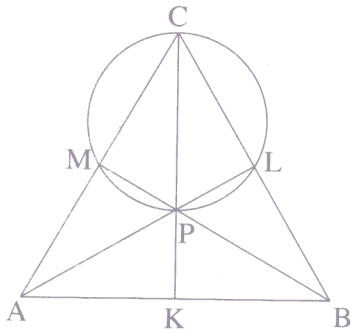
במשולש, ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר

דרך הנקודות M, L ו-C (ראה ציור).

נתון גם כי $AL = BM$.

(1) הוכח כי $BM \perp AC$.

(2) הוכח כי $AK = AM$.



5. מרובע AKLM חסום במעגל. AM הוא קוטר.

אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F

(ראה ציור).

נתון: $ML = 30$ ס"מ, $FL = a$ ס"מ.

שטח המשולש ALK קטן פי 3

משטח המשולש ALM.

א. מצא את אורך הגובה לצלע LA

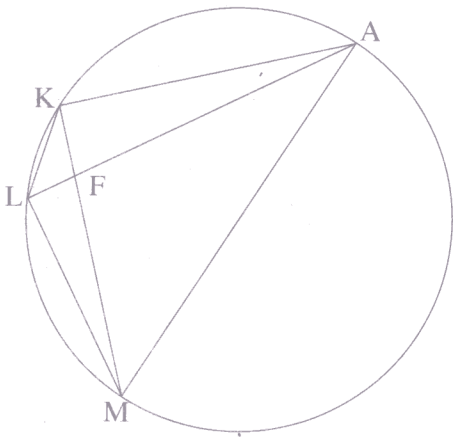
במשולש ALK.

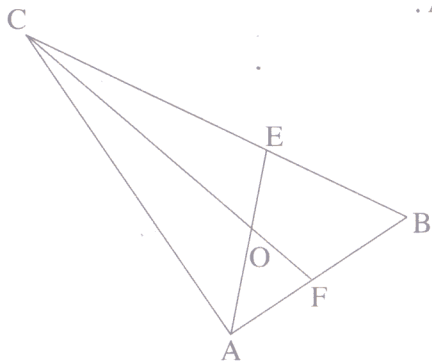
ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע KF.

ג. הוכח כי $\Delta AFM \sim \Delta KFL$.

ד. נתון גם: $AF = 42.5$ ס"מ, $ML > a$.

מצא את a.





6. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.

המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E.

המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F.

(ראה ציור).

נתון: $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\beta = 60^\circ$, $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל- $\frac{1}{2}BC$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות

ושל פונקציות טריגונומטריות ($\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7. נתונה הפונקציה $g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ בתחום $0 \leq x \leq \frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$

עם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB.

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

8. נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 + 4x + b$$

$$g(x) = -x^2 + c$$

b ו- c הם פרמטרים גדולים מ-0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P .

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P .

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b > 4$.

הישר $x = a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D , את הגרף של $f(x)$ בנקודה A

ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (A, D ו- B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB .

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי המשיק המשותף

ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = -a$, הוא S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$

ועל ידי הישרים $x = a$ ו- $x = -a$.

9. נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x) = \sqrt{8 - ax + bx^2} + c$ מוגדרת

בתחום $-2 \leq x \leq 2$ בלבד.

a, b ו- c הם פרמטרים, $c > 0$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b .

הצב את הערך של a ואת הערך של b , וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$.

השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה- x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.

מצא את הערך של הפרמטר c .

ג. בתחום $-2 \leq x \leq 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x)$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$,

ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\sqrt{2}$.

מהו סוג המרובע שנוצר על ידי שני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$

ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

בהצלחה!

זכות היוצרים שמורה למדינת ישראל
אין להעתיק או לפרסם אלא ברשות משרד החינוך